平成２６年度　九州大学大学院総合理工学府
先端エネルギー理工学専攻　２次募集入学試験問題

数　学

注意

１．各解答用紙右上部の受験番号欄に受験番号を記入すること。

２．問題１～問題５のうち３問を選んで解答すること。

３．３問の解答を問題ごとに、それぞれ別の解答用紙に書くこと。

４．採点は解答用紙の表のみで行うので裏には解答せず、紙面が足りない場合は追加解答用紙を請求すること。

５．途中までしか解答できなくても、中間段階までの結果を解答用紙に書いておくこと。

６．配点は各問題共５０点とする。

問題 1　以下の問に答えよ。

（1）　微分方程式 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=(1+4x)e^x$ の一般解を求めよ。

（2）　微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+y\sin x=\sin x$ の一般解を求めよ。

（3）　$p\equiv\dfrac{dy}{dx}$として、微分方程式 $y=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\sin\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$ を満たす x を p の関数として表せ。

問題 2　nを整数、xを実数とするとき、以下の積分を計算せよ。ここでiは虚数単位とする。

（1）　$\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2 e^{inx} dx$

（2）　$\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1} dx \quad (x>1)$

（3）　$\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{1+x^n}} dx \quad (x>0)$

問題 3　次の連立微分方程式を以下の手順に従って解け。

$$\begin{cases} \dfrac{dW_x}{dt} = -W_x + 2W_y + 2W_z \\ \dfrac{dW_y}{dt} = 2W_x + 2W_y + 2W_z \\ \dfrac{dW_z}{dt} = -3W_x - 6W_y - 6W_z \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

(a) の微分方程式を $\vec{W} = \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix}$ を用いて

$$\frac{d\vec{W}}{dt} = \mathbf{A}\vec{W}$$

と表すことにする。ここで $\mathbf{A}$ は係数行列である。

（1）　係数行列 $\mathbf{A}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ。

（2）　$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ を満たす正則行列 $\mathbf{P}$ を用いて係数行列 $\mathbf{A}$ を対角化せよ。ここで $\mathbf{B}$ は対角行列で $\mathbf{P}^{-1}$ は $\mathbf{P}$ の逆行列を表す。

（3）　以下の微分方程式を解け。ただし積分定数は適宜定義して使用すること。

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \mathbf{B}\vec{V}$$

（4）　$\mathbf{P}\vec{V}$ が (a) の解となることを示し、(a) の解を求めよ。

問題　４　x、y、z 座標系の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$（$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ は単位ベクトル)、その大きさを $r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ で表わす。∇ をナブラ演算子、∇^2 をラプラス演算子として、以下の問に答えよ。

（１）　$\nabla^2\dfrac{1}{r}$　（ただし　$r\neq 0$）を求めよ。

（２）　$\nabla\times(f(r)\boldsymbol{r})=0$ であることを示せ。ただし f は r のスカラー関数とする。

（３）　$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}))=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ を証明せよ。ただし $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ は定ベクトルとする。

問題　5　周期2πの周期関数$f(x)$のフーリエ級数を以下のように定義する。

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\quad(-\pi\le x\le\pi)$$

（1）　$f(x)$が奇関数(すなわち$f(-x)=-f(x)$)の場合に$a_n=0\ (n=0,1,2,\ldots)$となることを示せ。

（2）　$$f(x)=\begin{cases}-x-\pi & (-\pi\le x<-\pi/2)\\ x & (-\pi/2\le x<\pi/2)\\ -x+\pi & (\pi/2\le x\le\pi)\end{cases}$$ を図示してフーリエ級数で表せ。

（3）　$$f(x)=\begin{cases}x+\pi & (-\pi\le x<-\pi/2)\\ -x & (-\pi/2\le x<0)\\ x & (0\le x<\pi/2)\\ -x+\pi & (\pi/2\le x\le\pi)\end{cases}$$ を図示してフーリエ級数で表せ。