平成２７年度　九州大学大学院総合理工学府
先端エネルギー理工学専攻　入学試験問題

数　学

注意

１．各解答用紙右上部の受験番号欄に受験番号を記入すること。

２．問題１～問題５のうち３問を選んで解答すること。

３．３問の解答を問題ごとに、それぞれ別の解答用紙に書くこと。

４．採点は解答用紙の表のみで行うので、紙面が足りない場合は追加解答用紙を請求すること。

５．途中までしか解答できなくても、中間段階までの結果を解答用紙に書いておくこと。

６．配点は各問題共５０点とする。

問題　1　次の微分方程式の一般解を求めよ。

（1）$\dfrac{dy}{dx}-2xy=2x^3$

（2）$\dfrac{d^2y}{dx^2}-2\dfrac{dy}{dx}-3y=2\sin x-4\cos x$

（3）$2y-4-\log\left[\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+1\right]=0$　（$p=\dfrac{dy}{dx}$ とおいて解け）

問題 2　下記の問に答えなさい。x, y は実数とする。

（1）次の不定積分を求めよ。

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^2\right)^3}$$

（2）次の定積分を求めよ。

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\,\mathrm{d}x$$

（3）$x^2+\dfrac{y^2}{3}\leq 1$ と $\dfrac{x^2}{3}+y^2\leq 1$ の 2 つの楕円に共通な領域の面積を求めよ（2 つの楕円の交点の座標を求めて解け）。

問題 3　以下の問に答えよ。

（1）　行列に対する行に関する基本変形、すなわち

・ある行を何倍かしたものを他の行に加える

・二つの行を入れ替える

・ある行にゼロでない数をかける

を $\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ に行うことで、$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ の形をした階段行列を作れ。

（2）　$\mathcal{A}_1$ に $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ を加えた行列 $\left(\mathcal{A}_1\ \vec{b}_1\right) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ に対して行に関する基本変形を行うことで、$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$ の形をした階段行列を作れ。

（3）　（1）と（2）で求めた階段行列はすべての要素がゼロである行の数が異なる。このことから連立一次方程式 $\mathcal{A}_1 \cdot \vec{x} = \vec{b}_1$ は解 $\vec{x}$ を持つかどうか理由もつけて答えよ。

（4）　$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha+1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$、$\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2\alpha \end{pmatrix}$ の時、連立一次方程式 $\mathcal{A}_2 \cdot \vec{x} = \vec{b}_2$ が解を持たない条件を求めよ。

問題 4　$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ を x, y, z 座標系の単位ベクトルとする。位置ベクトルは $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$、その大きさは $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ で表わすことができる。∇ はナブラ演算子、$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$ および $\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$ は定ベクトルとする。以下の問に答えよ。

（1）　$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{r})$ を求めよ。

（2）　$\nabla \cdot \left(\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{r})\right)$ を求めよ。

（3）　$\nabla \cdot \left(\dfrac{\vec{r}}{r^4}\right)$ を求めよ。ただし $r \neq 0$ とする。

（4）　$\nabla \times (\nabla f)$ を求めよ。f は x, y, z に関する任意の連続関数とする。

問題 5　以下の問に答えよ。

（1）　$\omega = 1 + i$ を $re^{i\theta}$ の形に極座標表示し、その点を複素平面上に書け。ここで i は虚数単位とする。

（2）　$z^3 = \omega$ を満たすすべての z を複素平面上に書け。

（3）　$z^5 = 1$ を解くことで、$\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の値を求めよ。ここで

$$z^5 - 1 = z^2 (z-1)\left[\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1\right]$$ を利用するとよい。