平成２８年度　九州大学大学院総合理工学府
先端エネルギー理工学専攻　入学試験問題

数　学

注意

１．各解答用紙右上部の受験番号欄に受験番号を記入すること。

２．問題１～問題５のうち３問を選んで解答すること。

３．３問の解答を問題ごとに、それぞれ別の解答用紙に書くこと。
その際、各解答用紙左上部に選択した問題番号を記入すること。

４．採点は解答用紙の表のみで行うので、紙面が足りない場合は追加解答用紙を請求すること。

５．途中までしか解答できなくても、中間段階までの結果を解答用紙に書いておくこと。

６．配点は各問題共５０点とする。

問題 1　次の微分方程式の一般解を求めよ。

（1）　$\sqrt{x^2+1}\dfrac{dy}{dx}=y+2$

（2）　$\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+4y=\sin x$

（3）　$2x^2y\dfrac{dy}{dx}+2xy^2-x^2y^2=e^{2x}$　（$x>0$、$y\neq 0$）

問題 2　次の積分を計算せよ。

（1）　$\displaystyle\int \frac{\log\left(1+x^2\right)}{x^2}dx$

（2）　$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\left(a\cos^2 x+b\sin^2 x\right)^2}$　　$(a>0、b>0)$

（ヒント：まず $F=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a\cos^2 x+b\sin^2 x}$ を計算し、$\dfrac{\partial F}{\partial a}$ と $\dfrac{\partial F}{\partial b}$ の表式を利用せよ）

問題 3　以下の問に答えよ。

（1）　2つの行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$$

について、

(i) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ を確かめよ。

(ii) **A** および **B** を対角化する場合の基底変換行列をそれぞれ求めよ。

(iii) **A**, **B**, **A**+**B**, **AB** をそれぞれ対角化せよ。

（2）　文字列の暗号化を行う。はじめに、アルファベットの文字列を以下の対応表を用いて数字列に変換する。

A ⇔ 0	E ⇔ 4	I ⇔ 8	M ⇔ 12	Q ⇔ 16	U ⇔ 20	Y ⇔ 24
B ⇔ 1	F ⇔ 5	J ⇔ 9	N ⇔ 13	R ⇔ 17	V ⇔ 21	Z ⇔ 25
C ⇔ 2	G ⇔ 6	K ⇔ 10	O ⇔ 14	S ⇔ 18	W ⇔ 22	
D ⇔ 3	H ⇔ 7	L ⇔ 11	P ⇔ 15	T ⇔ 19	X ⇔ 23	

次に、変換された数字は、3文字を一組として鍵行列 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ を用いて暗号化される。

例えば、文字列 (A, B, C) は、$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ より、(2, 1, 3) に暗号化される。

このとき、暗号化された4組の数字列 (50, 34, 94), (17, 3, 23), (67, 22, 107), (70, 19, 108) を、元のアルファベットの文字列に変換せよ。

問題　4　位置座標 (x,y,z) のスカラー関数 $\phi(x,y)=\exp[-(x^2+y^2)]$ について以下の問に答えよ。ここで∇はナブラ演算子、Δはラプラス演算子とする。

（１）　$\nabla\phi$ を求めよ。

（２）　$\nabla\times\nabla\phi$ を計算せよ。

（３）　$\Delta\phi=4[(x^2+y^2)-1]\phi$ を示せ。

（４）　ベクトル関数 $\vec{\xi}(x,y)=(-y,x,0)$ が、$\nabla\phi$と直交することを示せ。

（５）　線積分 $\int_C |\nabla\phi|\vec{\xi}\cdot d\vec{s}$ を計算せよ。ここで積分路 C は xy 平面上の半径 $a(>0)$ の円周とし、積分方向は反時計回りとする。$d\vec{s}$は積分路に沿った微小ベクトルとする。

問題　5　周期 2π の周期関数 $f(x)$ $\left(-\pi < x \leq \pi\right)$ のフーリエ級数展開を

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

と定義する。以下の問に答えよ。

（1）　$f(x) = |x|$ をフーリエ級数展開せよ。

（2）　$f(x) = \pi|x| - x^2$ をフーリエ級数展開せよ。

（3）　（2）の結果を利用して $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ の値を求めよ。